УДК 519.6
Ю.І.Козбур
Львівський національний університет ім. І. Франка, Україна

ВПЛИВ ФОРМИ ГРАНИЦІ ОБЛАСТІ ДЛЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ НА ТОЧНІСТЬ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Y.I.Kozbur

THE INLUENCE OF THE DOMAIN SHAPE FOR DIRICHLET PROBLEM ON THE ACCURACY OF NUMERICAL SOLUTION

Нехай $D \subset \mathrm{R}^2$ − зв'язна область із замкненою границею Γ_2 та розрізом Γ_1 із крайніми точками x^{-1} та x^1. Необхідно знайти таку функцію $u : D \to \mathrm{R}$, що задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \text{ в } D \tag{1}$$

і граничні умови Діріхле

$$u = f_i \text{ на } \Gamma_i, \quad i = 1,2, \tag{2}$$

де f_i - задані достатньо гладкі неперервні функції. Подання розв'язку має вигляд:

$u(x) = \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in D$, де φ_i - розв'язки системи

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_i} \varphi_i(y)\Phi(x,y)ds(y) = f_j(x), \; x \in \Gamma_j, \;\; j = 1,2. \tag{3}$$

Розглянемо задачу (1)–(2) із $f_i(x) = \Phi(x, y^*)$ на $\Gamma_i, \;\; i = 1,2$. Очевидно, точним розв'язком цієї задачі є функція $u_{ex} = \Phi(x, y^*), \;\; x \in \bar{D}$, де y^* представляє собою точку $(10,10)$, що знаходиться поза областю.

Для чисельного експерименту розглянемо області $D_i, \; i = 1,2$, з однаково визначеною внутрішньою границею $\Gamma_1^{(i)}$ та різними зовнішніми $\Gamma_2^{(i)}$. Виконаємо параметризацію границь у вигляді:

$$\begin{cases} \Gamma_1^{(i)} = \left\{ x_1^{(2)}(t) = (t^3, t), \quad t \in [-1,1] \right\}, \\ \Gamma_2^{(1)} = \left\{ x_2^{(1)}(t) = \left(2\cos t + \sin t, 2\sin t\right), \quad t \in [0, 2\pi] \right\}; \\ \Gamma_2^{(2)} = \left\{ x_2^{(2)}(t) = r(t)\left(\tfrac{2}{3}\cos t, \sin t\right), \quad t \in [0, 2\pi] \right\}, \end{cases}$$

де $r(t) = \left(\left(\tfrac{1}{2}\cos t\right)^{10} + \left(\tfrac{1}{2}\sin t\right)^{10} \right)^{0,15}$.

Тоді для порядку M розмірності СЛАР, отриманої після дискретизації системи інтегральних рівнянь (3), отримаємо такі відносні похибки для чисельних розв'язків відносно двох областей в т.(0; 1):

M	$err_{\partial D_1}$	$err_{\partial D_2}$	M	$err_{\partial D_1}$	$err_{\partial D_2}$
2	0.06457859	0.0413924	16	9.479941e-07	7.866587e-06
4	0.003344844	0.0007266741	32	2.280907e-11	7.901079e-08
8	0.0005092399	0.0006982284	64	8.051254e-16	4.717411e-12

Отже, при однаковій внутрішній границі та різних зовнішніх похибка розв'язку для двох задач відрізняється, для більш складних областей точність обчислень спадає. Розв'язок при цьому збігається до точного експоненційно.